Matemáticas CCSS 2016

Opción A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considérense las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese el determinante de la matriz $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.
b) Calcúlese la matriz $\mathbf{M} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. ¿Existe $\mathbf{M}^{-1}$?

Nota: $\mathbf{C}^{\mathbf{T}}$ denota la matriz traspuesta de la matriz $\mathbf{C}$.

Solución:

a) Se opera:

$$|A| = -36 \quad |C| = 2$$
$$\left|\mathrm{A} \cdot \mathrm{C} \cdot \mathrm{C}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A}^{-1}\right| = |A| \cdot |C| \cdot |C^T| \cdot |A^{-1}| = |C|^2 = 4$$

b) Se opera:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 37 & 26 \\ 33 & 21 \end{pmatrix}$$

No tiene inversa al no ser cuadrada.

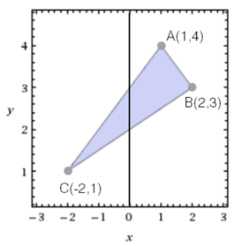
Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sea $\mathbf{S}$ la región del plano definida por:

$$\mathbf{y} + \mathbf{x} \le \mathbf{5};\ \mathbf{y} - \mathbf{x} \le \mathbf{3};\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{x} - \mathbf{y} \le -\mathbf{2}.$$

a) Represéntese la región $\mathbf{S}$ y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{2x} + \mathbf{y}$ en la región $\mathbf{S}$ indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trazan las rectas y se halla la región.



Los vértices son $\mathrm{A}(1,4)$, $\mathrm{B}(2,3)$ y $\mathrm{C}(-2,1)$.

mundoestudiante

b)

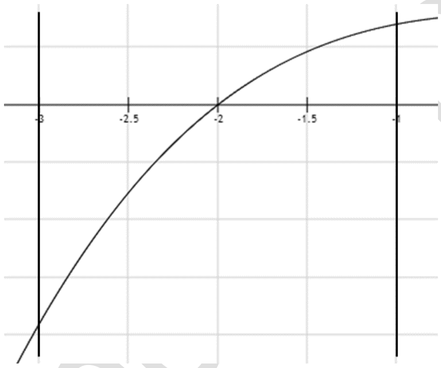
A: $f(1,4) = 6$
B: $f(2,3) = 7$
C: $f(-2,1) = -3$
El valor máximo es 7 y se alcanza en $B(2,3)$.
El valor mínimo es -3 y se alcanza en $C(-2,1)$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$\mathbf{f(x) = x^3 + 8}$$

a) Determínese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $\mathbf{f(x)}$, el eje de abscisas y por las rectas $\mathbf{x = -3}$ y $\mathbf{x = -1}$.
b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $\mathbf{f(x)}$ en el punto de abscisa $\mathbf{x = 1}$.

Solución:



a)

$$-\int_{-3}^{-2}(x^3+8)\,dx + \int_{-2}^{-1}(x^3+8)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}+8x\right]_{-2}^{-3} + \left[\frac{x^4}{4}+8x\right]_{-2}^{-1} =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}+8x\right]_{x=-3} + \left[\frac{x^4}{4}+8x\right]_{x=-1} - 2\left[\frac{x^4}{4}+8x\right]_{x=-2} = -\frac{15}{4} - \frac{31}{4} + 2\cdot 12 = \frac{25}{2}u^2$$

b)

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 3$$

La recta tangente pedida es:

$$y - 9 = 3(x-1)$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una conocida orquesta sinfónica está compuesta por un 55% de varones y un 45% de mujeres. En la orquesta un 30 % de los instrumentos son de cuerda. Un 25 % de las mujeres de la orquesta interpreta un instrumento de cuerda. Calcúlese la probabilidad de que un intérprete de dicha orquesta elegido al azar:

a) Sea una mujer si se sabe que es intérprete de un instrumento de cuerda.
b) Sea intérprete de un instrumento de cuerda y sea varón.

Solución:

Se interpretan los datos del enunciado:
$P(V) = 0{,}55$
$P(M) = 0{,}45$
$P(C) = 0{,}3$
$P(C/M) = 0{,}25$

a)

$$P(M/C) = \frac{P(C/M) \cdot P(M)}{P(C)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}45}{0{,}3} = 0{,}375$$

b)

$$P(C \cap V) = P(C) - P(C \cap M) = P(C) - P(C/M) \cdot P(M) = 0{,}3 - 0{,}1125 = 0{,}1875$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja familiar de ganado vacuno se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = \mathbf{50\ litros}$.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al $\mathbf{95}$ % tenga una amplitud a lo sumo de $\mathbf{10}$ litros.

b) Se toman los datos de producción de $\mathbf{25}$ días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas, $\mathbf{X}$, sea menor o igual a $\mathbf{940}$ litros si sabemos que $\mu = \mathbf{950}$ litros.

Solución:

$$X \equiv N(\mu, 50)$$

a) $A = 10 \Rightarrow E = 5$

$$C = 95\% \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}96 \cdot \frac{50}{5}\right)^2 = 384{,}16$$

La muestra mínima es $n = 385$.

b) La desviación típica de la muestra es:

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{50}{\sqrt{25}} = 10$$

$$X' \equiv N(950{,}10)$$

$$P(X' \leq 940) = P\left(Z \leq \frac{940 - 950}{10}\right) = P(Z \leq -1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

La probabilidad es $15{,}87\%$.