MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
CONVOCATORIA ORDINARIA JUNIO 2017
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - ay + 2z = 0 \\ ax - 4y - 4z = 0 \\ (2-a)x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.
b) Resuélvase para a = 3

Solución:

a) Como es un sistema homogéneo, tan solo es necesario estudiar el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 2-a & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$|A| = (8 + 6a + 4a(2 - a)) - (-8(2 - a) - 12 + 2a^2) = -6a^2 + 6a + 36 = -a^2 + a + 6$
$|A| = 0 \rightarrow -a^2 + a + 6 = 0 \rightarrow a = -2$ y $a = 3$.

– Para $a \neq -2$ y $a \neq 3 \rightarrow Rg(a) = 3 =$ nº de incógnitas → Sistema incompatible, pues al ser homogéneo, la única solución sería la trivial: (0,0,0).

– Para a = -2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2 < 3 =$ nº de incógnitas → Sistema compatible indeterminado con una indeterminación.

– Para a = 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2 < 3 =$ nº de incógnitas → Sistema compatible indeterminado con una indeterminación.

b) Para a = 3 es un sistema compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones. Para resolverlo nos quedamos con las dos últimas ecuaciones y resolvemos en función de z:

mundoestudiante
métodoBarbeito

$\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ 3x-4y-4z=0 \end{cases}$ → z = t → x = 4t, y = 2t → Solución: (4t, 2t, t).

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considérese la función real de variable real:

$$f(x)=x^3 - 3x.$$

a) Calcúlense:

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{1-x^3}$ y $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

b) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

Solución:

a)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{1-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x}{1-x^3}=-1$$

Puesto que el numerador y denominador tienen el mismo grado.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x}{x}=\lim_{x\to 0}x^2-3=-3$$

b) Para conocer la monotonía necesitamos estudiar el signo de la primera derivada:
f ′(x) = $3x^2$ – 3 → f ′(x) = 0 → $3x^2$ – 3 = 0 → x = ± 1.
f ′(−2) > 0 → crece; f ′(0) < 0 → decrece; f ′(2) > 0 → crece
En resumen: f crece en (-∞,−1) U (1,+∞) y decrece en (−1,1).

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x+2}, & x\le 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de f(x) en R.
b) Calcúlese $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

Solución:

a) La función $\frac{2}{x+2}$ es continua para todo $x<0$ excepto para x = 2 ya que anula el denominador, mientras que la función x + 2 es continua para todo x > 0. Faltaría solo estudiar la continuidad en x = 0:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x+2}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0}x+2=2$$

Es discontinua en x = 0 ya que los límites laterales no coinciden.

En resumen: $f(x)$ es continua en R - {−2,0}.

b)

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{2}{x+2} dx = [2\ln|x+2|]_{-1}^{0} = 2(\ln 2 - 0) = 2\ln 2.$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
El 30 % de los individuos de una determinada población son jóvenes. Si una persona es joven, la probabilidad de que lea prensa al menos una vez por semana es 0,20. Si una persona lee prensa al menos una vez por semana, la probabilidad de que no sea joven es 0,9. Se escoge una persona al azar. Calcúlese la probabilidad de que esa persona:
a) No lea prensa al menos una vez por semana.
b) No lea prensa al menos una vez por semana o no sea joven.

Solución:

Definimos los siguientes sucesos:
J: es una persona joven
L: lee prensa al menos una vez por semana
A partir del enunciado podemos sacar las siguientes probabilidades:
$P(J) = 0,3$; $P(L/J) = 0,2$. $P(\bar{J}/L) = 0,9$.

a)

$$P(L/J) = \frac{P(L\cap J)}{P(J)} \rightarrow P(L\cap J) = 0,2\cdot 0,3 = 0,6$$

$$P(L\cap J) + P(L\cap \bar{J}) = 1 \rightarrow P(L\cap \bar{J}) = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$P(\bar{J}/L) = \frac{P(L\cap \bar{J})}{P(L)} \rightarrow P(L) = \frac{0,4}{0,9} = 0,444 \rightarrow P(\bar{L}) = 1 - 0,444 = 0,556.$$

b) La probabilidad que nos piden es: $P(\bar{L}\cup\bar{J})$. Aplicando las leyes de Morgan:
$P(\bar{L}\cup\bar{J}) = P(\overline{L\cap J}) = 1 - P(L\cap J) = 1 - 0,6 = 0,4$.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El peso en toneladas (T) de los contenedores de un barco de carga se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica σ = 3T. Se toma una muestra aleatoria simple de 484 contenedores.
a) Si la media de la muestra es $\bar{X}$ =25,9T, obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para μ.
b) Supóngase ahora que μ = 23T. Calcúlese la probabilidad de que puedan transportarse en un barco cuya capacidad máxima es de 11000T

Solución:

a) Tenemos una distribución N (μ , 3T)
Para un nivel de confianza del 90%, a través de la tabla de la distribución normal, obtenemos que $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ = 1,645
La expresión del intervalo de confianza viene dada por:

$$I = \left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

En nuestro caso:

$$I = \left(25{,}9 \pm \frac{3T}{\sqrt{484}} \cdot 1'645\right) = (25{,}6757\,; 26{,}124)$$

b) Tenemos ahora una distribución X≈N (23T , 3T).

Como la capacidad máxima es 11000T y hay 484 contenedores podemos dividir entre el número de contenedores para calcular la probabilidad:

$$\frac{11000T}{484} = 22{,}73T$$

Tipificamos ahora para calcular la probabilidad:

$$P(X \leq 22{,}73) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{22{,}73T - 23T}{3T}\right) = P(Z \leq -0{,}9) = 1 - P(Z \leq 0{,}9)$$
$$= 1 - 0{,}5359 = 0{,}4641.$$