MATEMÁTICAS II
CONVOCATORIA ORDINARIA JUNIO 2016/2017
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 3 puntos)

Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = sen(x)$, se pide:

a) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to 0}\left(f(x) - \frac{2}{g(x)}\right)$.

b) (0.75 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva y=f(x) en el punto (1/2, 4).

c) (1.25 puntos) Calcular el área delimitada por la curva y=f(x) y la recta y=-x+3.

Solución:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{sen(x)}\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2(sen(x)-x)}{x\cdot sen(x)}\right) = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2(sen(x)-x)}{x^2}\right) = \frac{0}{0}(aplico\ L'Hôpital) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2(\cos(x)-1)}{2x}\right) = \frac{0}{0}(aplico\ L'Hôpital) = \lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)}{1} = 0$

b) La ecuación que nos ayuda a poder determinar la recta tangente es la siguiente:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

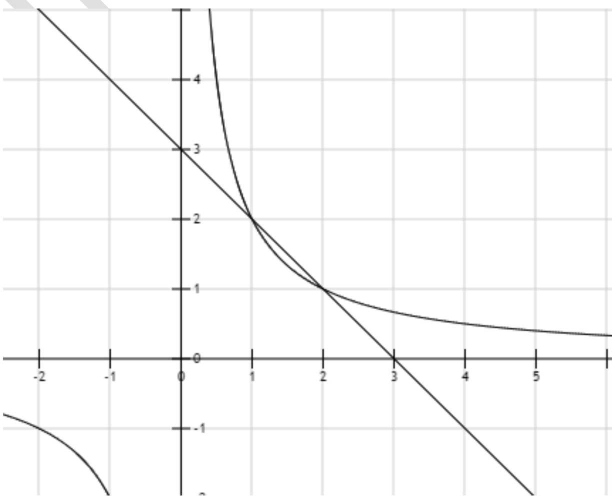
En este caso: $x_0 = \frac{1}{2}; f(x_0) = 4$. Lo que necesitaríamos calcular es la primera derivada de f(x) y determinar su valor en ½.

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2} \to f'\left(\frac{1}{2}\right) = -8$$

Teniendo en cuenta este valor, la ecuación quedará:

$$y - 4 = -8\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right) \to y - 4 = -8x + 4 \to y = -8x + 8$$

c) Lo primero que se debe hacer es realizar un dibujo de ambas funciones y calculamos los puntos de corte de ambas funciones entre sí igualando ambas funciones:



$$\frac{2}{x} = -x+3 \rightarrow 2 = -x^2+3x \rightarrow\ x^2-3x+2=0 \rightarrow x=1; x=2.$$

Como vemos en la gráfica, la recta está por encima de la función f(x). Por lo tanto el área se puede calcular de la siguiente forma:

$$A = \int_1^2 \left(-x+3-\frac{2}{x}\right) dx = \left[-\frac{x^2}{2}+3x-2\ln(x)\right]_1^2$$
$$= (-2+6-2\ln(2)) - (\frac{-1}{2}+3-2\ln(1)) = 0.1137\ u^2$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 3 puntos)

Dadas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.
b) (1 punto) Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B=P^{-1}J^{-1}$.
c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A= PJP^{-1}$.

Solución:

a) Para calcular la matriz inversa de una matriz dada, seguimos el siguiente esquema:

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} \cdot (adj\ P)^T$$

Es importante saber que si el determinante de la matriz P es igual a cero, dicha matriz no tiene inversa. Por ello, es imprescindible hacer siempre primero el determinante de la matriz P.

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4+9+8-4-12-6 = -1$$

Como vemos, es distinto de cero y seguimos operando para obtener la matriz inversa.

$$adj\ P = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow (adj\ P)^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

b) En este caso, nos piden calcular la inversa de una matriz que podemos calcular como producto de la inversa de dos matrices. Operamos de la siguiente forma:

$$B = P^{-1}J^{-1} \rightarrow B^{-1} = (P^{-1}J^{-1})^{-1} \rightarrow B^{-1} = JP$$

Una vez tengo la matriz inversa puesta de forma que se puede calcular de forma sencilla, opero.

$$B^{-1} = JP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

c) En este caso, nos piden calcular el determinante de una matriz que este elevado al cuadrado; pero la matriz está puesta como un producto de matrices. Operamos del siguiente modo aplicando las propiedades de los determinantes:

$$|A| = |PJP^{-1}| = |P||J||P^{-1}| = |J| = -2$$

Esto es así puesto que el producto del determinante de una matriz por el determinante de su matriz inversa es igual a 1.

Me piden el determinante de A^2, por lo que será:

$$|A^2| = |A|^2 = |J|^2 = 4$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos).

a) (1 punto) Determine la distancia entre las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

b) (1 punto) Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.

Solución:

a) Lo que haremos es pasar las rectas a paramétricas y determinar de cada una de ellas un punto y un vector; ya que con ello lo que haremos será determinar la posición relativa de ambas. Es necesario puesto que sólo podemos determinar la distancia entre ambas en el caso de que sean o paralelas o que se crucen, y la forma de proceder es distinta en cada caso.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,1,1); P(0,0,0)$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \overrightarrow{u_{r_2}} = (1,-1,1); Q(0,1,1)$$

Lo que vamos a hacer es plantear dos matrices; una que denominaremos como A que estará formado por los vectores directores de cada recta y otra que denominaremos como B (formada por los vectores directores de cada recta y por el vector compuesto por los dos puntos).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hacemos el estudio de los rangos ya que podemos saber cuál es su posición relativa mediante el valor de los rangos que obtengamos.

Rg (A):

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \to$ Rg(A)=2

Rg (B):

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 + 0 - 0 - 1 - 1 = -2 \neq 0 \to$ Rg(B)=3

Como Rg(A)≠Rg(B)→ las rectas se cruzan.

Una vez sabemos la posición relativa, pasamos a calcular la distancia entre ambas de la siguiente forma:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}|}{|\overrightarrow{u_{r_1}} X \overrightarrow{u_{r_2}}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

b) En el enunciado nos dicen que la recta y el plano son perpendiculares, el vector director de la recta será el vector normal del plano. Como sabemos el vector normal del plano y un punto por el que pasa, podemos determinar la ecuación del plano. Por último, buscaremos el punto de corte de la recta y el plano.

$$s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \overrightarrow{u_s} = (1,-1,1)$$

$\pi \equiv x - y + z = 0$

Sustituyendo la recta en paramétricas en el plano, determinaremos el punto de corte entre ambos.

$$t - (2 - t) + 1 + t = 0 \rightarrow 3t = 1 \rightarrow t = {}^{1}/_{3}$$

El punto de corte será el P (1/3, 5/3, 4/3).

<u>Ejercicio 4.</u> (Calificación máxima: 2 puntos)

El 40% de los sábados Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30% restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras, y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

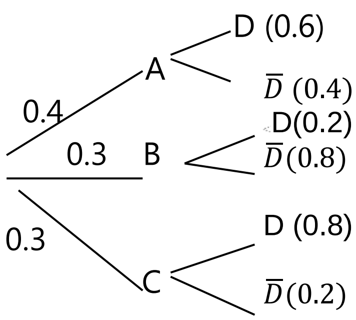
a) (1 punto) Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.
b) (1 punto) Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

Solución:

a) En primer lugar, lo que haremos será hacer un diagrama en árbol y marcar los sucesos:

A: "Marta va al cine".
B: "Marta va de compras".
C:"Marta juega a videojuegos".
D: "Hace planes con sus compañeros de baloncesto".

El diagrama en árbol correspondiente es el siguiente:



Aplicando el teorema de la probabilidad total podemos calcular la probabilidad de que no quede con los compañeros del grupo de baloncesto:

$$P(\overline{D}) = P(A) \cdot P(\overline{D}/A) + P(B) \cdot P(\overline{D}/B) + P(C) \cdot P(\overline{D}/C) = 0.4 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.2 = 0.46$$

b) En este caso, ya que nos dicen la condición que debe cumplirse (ya que nos dicen "si se sabe que Marta ha quedado con sus compañeros de baloncesto"), empleamos el teorema de Bayes de la siguiente forma:

$$P(A/D) = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)} = \frac{0.4 \cdot 0.6}{0.4 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.8} = 0.44444 \ldots = 0.\overline{4}$$