MATEMÁTICAS II
SEPTIEMBRE 2015
OPCIÓN B

**Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 3 puntos)
Dada la función:

$$\begin{cases} a + x\ln(x) & x > 0 \\ x^2 e^x & x \le 0 \end{cases}$$

a) Calcular el valor de a para que f(x) sea continua en todo $\mathbb{R}$.
b) Calcular f'(x) donde sea posible.
c) Calcular $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Solución:

a) Analizamos la función en x=0 para que sea continua.

$$\lim_{x\to 0^+} a + x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} a + \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = a + [0\cdot(-\infty)] = a + \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)(L'H) =$$

$$= a + \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = a + \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{-x} = a + 0 = a$$

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 e^x = 0\cdot e^0 = 0$$

$$f(0) = 0\cdot e^0 = 0$$

Para que sea continua: $\lim_{x\to 0^+} = \lim_{x\to 0^-} = f(0) \to a = 0$

b) Para calcular la derivada, hay que analizar la derivabilidad.

$$f'(x) = \begin{cases} \ln(x) + 1 & x > 0 \\ 2x\,e^x + x^2 e^x & x \le 0 \end{cases}$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0\,e^0 + 0e^0 = 0$$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-) \to f(x)$ no es derivable en $x = 0$

c) Hacemos la integral indefinida primero, que se resuelve por partes:

$$I = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$$

$$u = x^2 \to du = 2x\,dx$$

$$dv = e^x dx \to v = e^x$$

$$\int 2xe^x dx = 2xe^x - \int 2e^x dx = 2xe^x - 2e^x = 2e^x(x-1)$$

$$u = 2x \to du = 2\,dx$$

$$dv = e^x dx \to v = e^x$$

$$I = \left[x^2e^x - [2e^x(x-1)]\right]_{-1}^{0} = [e^x(x^2-2x+2)]_{-1}^{0} = e^0(2) - [e^{-1}((-1)^2 - 2(-1) + 2] = 2 - \frac{5}{e}$$

**Ejercicio 2.** (Calificación máxima: 3 puntos)
Dados los puntos P(-1,-1,1), Q(1,0,2) y los planos

$\pi_1 \equiv \mathrm{x} - \mathrm{z} = 0$

$\pi_2 \equiv \mathrm{my} - 6\mathrm{z} = 0$

$\pi_3 \equiv \mathrm{x} + \mathrm{y} - \mathrm{mz} = 0$

Se pide:

a) Calcular los valores de m para los que los tres planos se corten en una recta.
b) Para m=3, hallar la ecuación del plano que contiene al pinto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos $\pi_1$ $y$ $\pi_2$ .
c) Hallar la distancia entre los puntos Q y P', siendo P' el punto simétrico de P respecto al plano $\pi_1$.

Solución:

a) Si |A|=0 los tres planos se cortan en una recta.

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \mathrm{m} & -6 \\ 1 & 1 & -\mathrm{m} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\mathrm{m}^2 + \mathrm{m} + 6 = 0$$

Para m=3 y m=-2 los tres planos se cortan en una recta.

b) Se hace el determinante con los vectores normales de los planos y el punto P.

$$\sigma = \begin{vmatrix} \mathrm{x}+1 & \mathrm{y}+1 & \mathrm{z}-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \mathrm{x} + 2\mathrm{y} + \mathrm{z} + 2 = 0$$

c) Llamamos r a la recta perpendicular al plano, con $\overrightarrow{\mathrm{v_n}}(1,0,-1)$, que pasa por P.

$$\mathrm{r} \equiv \begin{cases} \mathrm{x} = -1 + \mathrm{t} \\ \mathrm{y} = -1 \\ \mathrm{z} = 1 - \mathrm{t} \end{cases}$$

El punto medio M es la intersección de la recta r y el plano $\pi_1$:

$$(-1+\mathrm{t}) - (1-\mathrm{t}) = 0 \rightarrow \mathrm{t} = 1 \rightarrow \mathrm{M}(0,-1,0)$$

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{P}+\mathrm{P}'}{2} \begin{cases} 0 = \dfrac{-1+\mathrm{x}}{2} \rightarrow \mathrm{x} = 1 \\ -1 = \dfrac{-1+\mathrm{y}}{2} \rightarrow \mathrm{y} = -1 \\ 0 = \dfrac{1+\mathrm{z}}{2} \rightarrow \mathrm{z} = -1 \end{cases} \qquad \mathrm{P}'(1,-1,-1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}'} = (1,0,2) - (1,-1,-1) = (0,1,3)$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}'}\right| = \sqrt{0 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{10}\ \mathrm{u}$$

**Ejercicio 3.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 2a-2b & b & c \\ 2d-2e & e & f \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -10\begin{vmatrix} a-b & b & c \\ d-e & e & f \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -10\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -10 \cdot 3 = -30$$

b)

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & c-3 \\ 2 & 4 & 6 \\ d & e & f \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & c-3 \\ d & e & f \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & c-3 \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \cdot 3 = -12$$

**Ejercicio 4.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A, es decir, que cumplen AB=BA.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b & a \\ 3c+d & c \end{pmatrix} \to \begin{cases} 3a+c = 3a+b \\ 3b+d = a \\ a = 3c+d \\ b = c \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} a = 3b+d \\ b = c \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3b+d & b \\ b & d \end{pmatrix}$$