MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
SEPTIEMBRE 2016
OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la matriz:

$$A\begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

a) Estúdiese para qué valores de k la matriz A tiene inversa
b) Determínese, para k=1, la matriz X tal que X*A=Id

Nota: Id denota la matriz identidad de tamaño 3x3.

Solución:

$$A\begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

a) Para que A tenga inversa, $|A| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} k & -1 & 0 \\ -7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{vmatrix} = K^3 - K^2 - 6K = 0 \left[\begin{array}{l} K = 2 \\ K = 0 \\ K = -3 \end{array} \right.$$

Solución: La matriz A tiene inversa si k≠3, k≠0, k≠2

b) Para k=1,

$$A\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A * X = Id \rightarrow X = A^{-1}$ $\qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|} * Adj^t(A)$ $\qquad |A| = 1^3 + 1^2 - 6 * 1 = -4$

$$Adj^t(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Solución: X = A^{-1} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}}$$

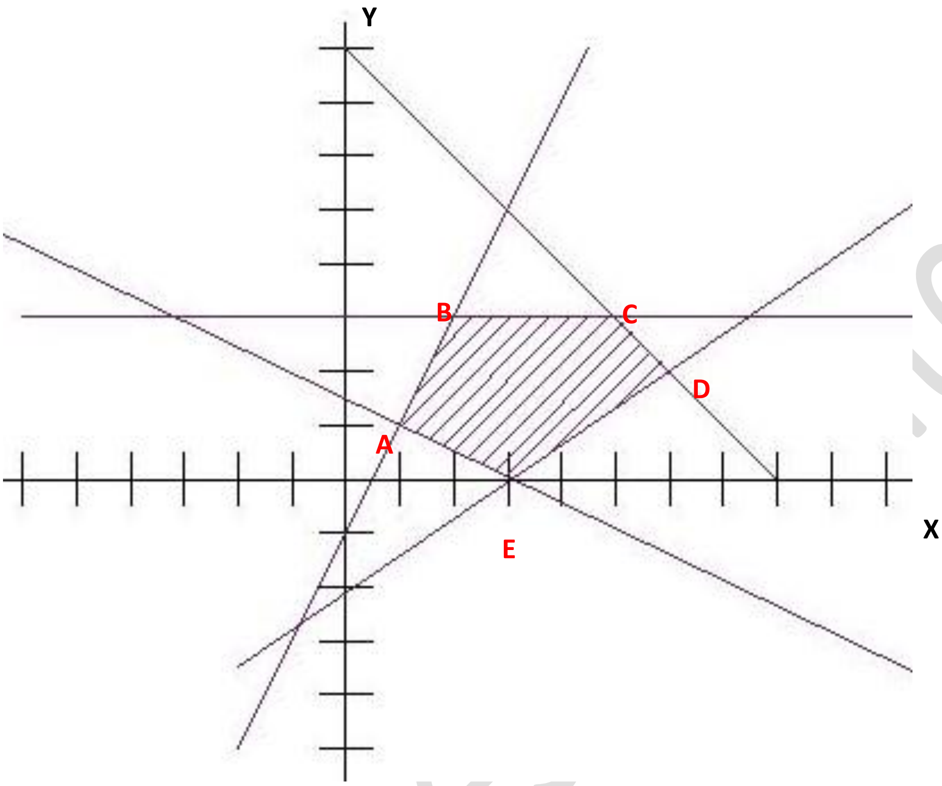
Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos):
Sea S la función definida por

$$\{\, 2x - y \geq 1; \quad 2x - 3y \leq 6; \quad x - 2y \geq 3; \quad x + y \leq 8; \quad y \leq 3 \,\}$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función f(x,y)= 2x + y en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan esos valores máximo mínimo.

Solución:

a) Región S coordenadas de sus vértices.



b) Valores máximo y mínimo de la función f(x,y)= 2x + y en la región S

$$f(x,y) = 2x + y$$

$A \rightarrow f(1,1) = 2 * 1 - 1 = 1\ MINIMO\ EN\ (1,1)$

$B \rightarrow f(2,3) = 2 * 2 + 3 = 7$

$C \rightarrow f(5,3) = 2 * 5 + 3 = 13$

$D \rightarrow f(6,,2) = 2 * 6 + 2 = 14\ MÁXIMO\ EN\ (6,2)$

$E \rightarrow f(3,0) = 2 * 3 = 6$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si \quad x < 1, \\ \frac{ax+b}{x} & si \quad 1 \le x \le 2, \\ \sqrt{x^3 + 1} & si \quad x > 2. \end{cases}$$

a) Determínense los valores que deben tomar los parámetros a y b para que f(x) sea continua en x=1 y x=2.

b) Calcúlese, para a=4 y b= -2, el área del recinto acotado por la gráfica de f(x), el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=2.

Solución:

a) Valores de a y b para que f(x) sea continua en x=1 y x=2.

Para x=1

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to 1^-} x^2+1=2\\ \lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b}{x}=a+b\\ f(1)=a+b\end{array}\right\}\text{Para ser continua en x=1 : } \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(x)\rightarrow$$

$$a+b=2$$

Para x= 2

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to 2^-}\frac{ax+b}{x}=\frac{2a+b}{2}\\ \lim_{x\to 2^+}\sqrt{x^3+1}\ =3\\ f(2)=\frac{2a+b}{2}\end{array}\right\}\ \frac{2a+b}{2}=3\rightarrow 2a+b=6$$

$$\left.\begin{array}{r}a+b=2\\ 2a+b=6\end{array}\right\}\ a=4\ b=-2$$

b) Calcúlese, para a=4 y b= -2, el área del recinto acotado por la gráfica de f(x), el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=2.

$$\int_1^2\frac{4x-2}{x}dx=\int_1^2\frac{4x}{x}dx-\int_1^2\frac{2}{x}dx=[4x]_1^2-[2\ln(x)]_1^2=\ 4-2ln2\ u^2$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que P(A)=3/4 , P(A|B)=3/4 y P(B|A)=1/4.

a) Demuéstrese que A y B son sucesos independientes pero no incompatibles
b) Calcúlese **P($\bar{A}$ |$\bar{B}$)**

Solución:

a) Dos sucesos son independientes si se cumple que P(A|B)= P(A) y P(B|A)=P(B), de lo que resulta que $\mathbf{P(A\cap B)=P(A)\ x\ P(B)}$. Dos sucesos son incompatibles si $\mathbf{P(A\cap B)=0}$

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\rightarrow P(A\cap B)=P(B|A)\ x\ P(A)=\frac{1}{4}\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$$

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\rightarrow P(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A|B)}=\frac{3/16}{3/4}=\frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{array}{r}P(A\cap B)=\frac{3}{16}\\ P(A)\ x\ P(B)=\frac{3}{4}x\frac{1}{4}=\frac{3}{16}\end{array}\right\}\ se\ cumple\ que\ son\ sucesos\ independientes\ pero\ no\ incompatibles$$

b) Calcular **P($\bar{A}$ |$\bar{B}$)**

$$P(\bar{A}\,|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\overline{A\cup B}}{1-P(B)} = \frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

$$P(\bar{A}\,|\bar{B}) = \frac{1-\frac{13}{16}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El tiempo, en minutos, que los empleados de unos grandes almacenes tardan en llegara a casa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica σ=5.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 empleados y su media muestral es $\bar{x} = 30$ minutos. Determínese un intervalo de confianza al 95% para μ
b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ c al 99% que tenga una amplitud a lo sumo de 10 minutos?

Solución:

a) Intervalo de confianza al 95% para la media poblacional. Esta media sigue una distribución normal $N\left(30, \frac{5}{\sqrt{64}}\right)$

$$1-\alpha = 0{,}95 \to \alpha = 0{,}05 \to {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}025 \to 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}975 \to P\left(Z \leqq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}975$$
$$\to Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$$

$$IC = \left(\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\, {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right) = \left(30 \pm 1{,}96 * {}^{5}/_{\sqrt{64}}\right) = (28{,}775; 31{,}225)$$

b) Tamaño n de la muestra para un intervalo al 99% con una amplitud de 10minutos.

$$1-\alpha = 0{,}99 \to \alpha = 0{,}01 \to {}^{\alpha}/_{2} = 0{,}005 \to 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0{,}995 \to P\left(Z \leqq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}995$$
$$\to Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575$$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\, {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}} \to 5 = 2{,}575 * {}^{5}/_{\sqrt{n}} \to \sqrt{n} = \frac{2{,}575 * 5}{5} \to n = 2{,}575^2 \to n = 6{,}63 \backsim 7$$