MATEMÁTICAS II
SEPTIEMBRE 2016
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 3 puntos)
Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2x + (a-1)y - 2z = a \\ 2x + y - az = 2 \\ -x + y + z = 1-a \end{cases}$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolverlo cuando sea posible.

Solución:

$$A\begin{pmatrix} 2 & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$$

a) $\begin{vmatrix} 2 & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2-4+a^2-a-2+2a-2a+2 = a^2-a-2 = 0 \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-1 \end{array} \right.$

<u>a≠2 y a≠ − 1</u> Rg(A) = Rg(B) = nº incógnitas → Sistema Compatible Determinado

<u>a= 2</u> Rg(A) = Rg(B) < nº incógnitas → Sistema Compatible Indeterminado

$$A\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Rg(A):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2$$

Rg(B):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow Rg(B) = 2$$

<u>a= −1</u> Rg(A) ≠ Rg(B) → Sistema Incompatible

$$A\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rg(A):

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2$$

Rg(B):

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow Rg(B) = 3$$

b) Para a=2

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 2 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ -x + y + z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 2 + 2\lambda \\ -x + y = -1 - \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 2 + 2\lambda \\ x - y = 1 + \lambda \\ \hline 3x \quad = 3 + 3\lambda \end{cases} \begin{matrix} \to (1+\lambda) - y = 1 + \lambda \to y = 0 \\ \to x = 1 + \lambda \end{matrix}$$

Solución: (1+λ, 0, λ)

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 3 puntos)
Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{5+x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de f y determinar sus asíntotas.
b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f'(x) donde sea posible.
c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Solución:

a) Se analiza la continuidad en las funciones que componen f(x) y en el cambio de función x=0

$\frac{1}{5-x}$ es discontinua en x=5 pero como no pertenece al dominio de esta función, es continua en su dominio.

$\frac{1}{5+x}$ es discontinua en x= - 5 pero como no pertenece al dominio de esta función, es continua en su dominio.

Para x=0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{5+x} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{5-x} = \frac{1}{5}$$

$$f(0) = \frac{1}{5-0} = \frac{1}{5}$$

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ la función es continua en $\mathbb{R}$

Estudio asíntotas

∄ A.V.

A.H. en y=0

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{5+x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{5-x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

b) Analizamos la derivabilidad en x=0.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(5-x)^2} & \text{si} \quad x<0\\ \dfrac{-1}{(5+x)^2} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{(5+x)^2}=-\frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{(5-x)^2}=\frac{1}{5}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$ la función no es derivable en x=0

c) La integral se va a dividir en dos integrales al ser una función a trozos y el intervalo incluir el punto en el que cambian las funciones:

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{5-x}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{5+x}dx=-\mathrm{Ln}|5-x|\ \Big]_{-1}^{0}+\mathrm{Ln}|5+x|\ \Big]_{0}^{1}=$$

$$=(-\mathrm{Ln}5+\mathrm{Ln}6)+(\mathrm{Ln}6-\mathrm{Ln}5)=2\mathrm{Ln}6-2\mathrm{Ln}5=0{,}3646$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea π el plano que contiene a los puntos A(0, 2,1), B(1, 0, 1) y C(-1, -2, -1). Calcule el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas con los puntos de intersección de π con cada uno de los ejes coordenados.

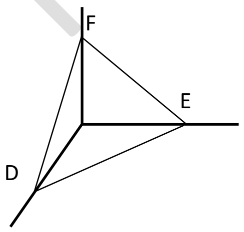
Solución:

$$\pi \in \begin{cases} A\,(0,2,1)\\ B(1,0,1)\\ C(-1,-2,-1)\end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(1,-2,0)$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(-1,-4,-2)$$

$$\pi\equiv\begin{vmatrix} x & y-2 & z-1\\ 1 & -2 & 0\\ -1 & -4 & -2\end{vmatrix}=4x-4(z-1)-2(z-1)+2(y-2)=0\to 2x+y-3z+1=0$$



$$F\ \to\ 3z+1=0\ \to\ z=-\frac{1}{3} \qquad F\left(0,0,-\frac{1}{3}\right)$$

$$E\ \to\ 2x+1=0\ \to\ x=-\frac{1}{2} \qquad E\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$$

$$D\ \to\ y+1=0\ \to\ y=-1 \qquad D\,(0,-1,0)$$

Vectores propios del tetraedro

$$\overrightarrow{OF}\left(0,0,-\frac{1}{3}\right)\qquad \overrightarrow{OE}\left(-\frac{1}{2},0,0\right)\qquad \overrightarrow{OD}\,(0,-1,0)$$

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}u^3$$

<u>Ejercicio 4.</u> (Calificación máxima: 2 puntos)
Dados el plano $\pi \equiv 3x + 3y + z - 9 = 0$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano perpendicular a π que contiene al eje OX.
b) (1 punto) Determinar el punto del plano π más cercano al origen de coordenadas.

Solución:

a) Por ser $\beta \perp \pi$, éste contiene al vector normal de π.

$V_\pi(3,3,1) \quad V_x(1,0,0) \quad P_o(0,0,0)$

$$\beta \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = y - 3z = 0$$

b) El punto más cercano será el que esté en la recta r perpendicular al plano π que pase por el origen de coordenadas.

$V_\pi(3,3,1) \quad P_o(0,0,0)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

El punto pedido será la intersección de la recta con el plano π.

$$3\cdot 3t + 3\cdot 3t + t - 9 = 0 \rightarrow 19t = 9 \rightarrow t = \frac{9}{19}$$

$$P \equiv \begin{cases} x = 3\cdot\frac{9}{19} = \frac{27}{19} \\ y = 3\cdot\frac{9}{19} = \frac{27}{19} \\ z = \frac{9}{19} \end{cases}$$