MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA SEPTIEMBRE 2017
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérense las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determínese la matriz C^{40}.
b) Calcúlese la matriz X que verifica

$$X \cdot A + 3B = C.$$

Solución:

a) $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow C^{40} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X \cdot A + 3B = C \rightarrow X = (C - 3B) \cdot A^{-1}$

$C - 3B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 2}$$

a) Estúdiense sus asíntotas.
b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a)

Asíntotas verticales: $3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$;

$\lim_{x \to \frac{2}{3}^-} f(x) = +\infty \; ; \; \lim_{x \to \frac{2}{3}^+} f(x) = -\infty$

Asíntotas horizontales: No tiene ya que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x(3x-2)} = \frac{1}{3}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{-1 + \frac{2}{3}x}{3x - 2} = \frac{2}{9}$$

La asíntota oblicua es: $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$

b)

$$f'^{(x)} = \frac{2x(3x-2)\ - 3(x^2-1)}{(3x-2)^2} = \frac{3x^2 - 4x + 3}{(3x-2)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow$ No tiene solución

La derivada es positiva siempre luego la función crece en todo R.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^2 + ax.$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real a para que la función f(x) tenga un extremo relativo en x = 2. Determínese si se trata de un máximo o un mínimo local.
b) Para a = −2, hállese el área del recinto acotado por la gráfica de f(x), el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 2.

Solución:

a) Si tiene un extremo relativo en $x = 2 \rightarrow f'(2) = 0$

$$f'(x) = 2x + a;\ f'(2) = 0 \rightarrow 4 + a = 0 \ \rightarrow a = \ -4.$$

$$f''(x) = 2\ > 0 \rightarrow \quad x = 2 \text{ es un mínimo.}$$

b) Como el recinto limitado está por debajo del eje OX:

$$\text{Área} = -\int_0^2 f(x)\,dx = \ -\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = \ -\ \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = -\left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3}$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

La probabilidad de que cierto río esté contaminado por nitratos es 0,6, por sulfatos es 0,4, y por ambos es 0,2. Calcúlese la probabilidad de que dicho río:

a) No esté contaminado por nitratos, si se sabe que está contaminado por sulfatos.
b) No esté contaminado ni por nitratos ni por sulfatos.

Solución:

a) Definimos los sucesos:
CN: contaminado por nitratos; CS: contaminado por sulfatos
$(\overline{CN} \cap CS)U(CN \cap CS) = CS \rightarrow P(\overline{CN} \cap CS) = P(CS) - P(CN \cap CS) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$

$$P(\overline{CN}/CS) = \frac{P(\overline{CN} \cap CS)}{P(CS)} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5.$$

b) P(CNUCS) = P(CN) + P(CS) – P(CN∩CS) = 0,6 + 0,4 – 0,2 = 0,8

$$P(\overline{CN} \cap \overline{CS}) = P(\overline{CNUCS}) = 1 - P(CNUCS) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

La longitud auricular de la oreja en varones jóvenes, medida en centímetros (cm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ= 0,6 cm.

a) Una muestra aleatoria simple de 100 individuos proporcionó una media muestral $\overline{X} = 7$ cm. Calcúlese un intervalo de confianza al 98% para μ.
b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea a lo sumo de 0,1 cm, con un nivel de confianza del 98%?

Solución:

a) Calculamos primero $z_{\frac{\alpha}{2}}$: $1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}1$ → Deja a la izquierda una probabilidad de 0,99 → Mirando en la tabla: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33$.

$$I = \left(\overline{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = \left(7 \pm 2{,}33 \cdot \frac{0{,}6}{10}\right) = (6{,}8602\,, 7{,}1398)$$

b)

$$\text{Error} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \rightarrow 0{,}1 = 2{,}33 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{N}} \rightarrow N = 195{,}44 \approx 196.$$