MATEMÁTICAS II
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA SEPTIEMBRE 2017
OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 3 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y la matriz identidad $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la matriz B= (A−I)(2I+2A).
b) (1,5 puntos) Determinar el rango de las matrices A−I, A^2−I y A^3−I.
c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6, en caso de que exista.

Solución:

a) Como me piden determinar esa matriz. Calcularé primero A-I, y 2I+2A por separado y luego realizaré la multiplicación entre ambas.

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2I + 2A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = (A - I) \cdot (2I + 2A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Calculamos cada matriz y realizamos el estudio de los rangos de cada una:

- Rang(A−I):

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to \text{Rang}\,(A - I) = 2$$

- Rang(A^2−I):

$$A^2 - I = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como en esta matriz tenemos dos filas (y/o columnas) con ceros, podemos decir que el rango de esta matriz es 1.

➢ Rang(A^3−I):

$$A^3 - I = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(A^3 - I): \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \rightarrow \text{rang}\,(A^3 - I) = 2$$

c) Para poder determinar la matriz inversa de A^6, primero determinaremos dicha matriz y el determinante asociado a esa matriz; puesto que si el determinante de esa matriz da cero, la matriz asociada no tiene inversa.

$$A^6 = A^3 \cdot A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A^6| = \begin{vmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 64 \neq 0 \rightarrow \text{tiene inversa}$$

$$\text{Adj}\,(A^6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} \rightarrow [\text{Adj}\,(A^6)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$$

Teniendo esto en cuenta, la matriz inversa es:

$$(A^6)^{-1} = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 3 puntos).

Se considera la función:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1}$$

se pide:

a) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x=0.
b) (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.
c) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

Solución:

a) La fórmula para determinar la recta tangente a esa función será:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

En este caso, x_0 es el 0. Por lo tanto, necesito calcular la primera derivada en ese punto y el valor de la función.

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2+1) - e^{-x}(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2} \rightarrow f'(0) = -1$$

$f(0) = 1$
Sustituyendo y operando, obtenemos que la ecuación de la recta tangente es:
$y = -x + 1$

b) Para el estudio de las asíntotas verticales, estudiamos el dominio de la función. En este caso como no hay ningún valor de x que anule el denominador, el dominio será: $\text{Dom } f = (-\infty, +\infty)$. Por ello, no tiene asíntotas verticales.

Para el estudio de las asíntotas horizontales, calculamos los límites siguientes:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = \frac{0}{\infty} \text{ (separar 2 límites)} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (L'Hôpital)} \rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \text{(L'Hôpital)} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{2} = \infty$$

Como vemos presenta asíntota horizontal en y=0.

c) Para estudiar la monotonía y los puntos críticos de la función, igualamos a cero la primera derivada:

$$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)^2}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x^2+2x+1 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = -1 \text{ (posible máximo o mínimo)}$$

Estudiaremos el signo de la primera derivada para valores menores de −1 y mayores de −1.

$f'(-2) = -0{,}29556 \ldots < 0 \rightarrow \text{decrece}$
$f'(0) = -1 < 0 \rightarrow \text{decrece}$

Dado que la función es decreciente en todo su dominio, en x=−1 la función no presentará ni máximos ni mínimos.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3,2,0)$ y $P_2(7,0,2)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto $Q(3,5,-3)$ a la recta r.
b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano plano perpendicular a r que pasa por el punto Q.

Solución:

a) Para determinar la distancia de un punto a una recta aplicamos la siguiente fórmula:

$$d(Q,r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Para ello determinamos dos vectores formados por los puntos Q y P_1, y los puntos P_1 y P_2.

$$\overrightarrow{QP_1}(\,0,-3,3) \text{ y } \vec{u} = P_2 - P_1 = (4,-2,2)$$

$$\overrightarrow{QP_1} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 12\vec{j} + 12\vec{k}$$

Aplicamos la fórmula y tenemos lo siguiente:

$$d(Q,r) = \frac{|\overrightarrow{QP_1} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{288}}{\sqrt{24}} = 2\sqrt{3}\,u$$

b) Para determinar un plano perpendicular a una recta y que pase por un punto, necesito un vector perpendicular a ese plano. En este caso, el vector del plano será el mismo que el vector director de la recta. Después sustituyendo el punto Q en el plano, definimos completamente el plano en cuestión. Por lo tanto, el plano quedará definido de la siguiente forma:

$$\pi \equiv 4x - 2y + 2z - 4 = 0$$

Una vez tenemos el plano definido, interseco recta con plano. Para ello lo que hago es, sustituir la recta en paramétricas en el plano y determinar el valor del parámetro "t".

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{y} \quad \pi \equiv 4x - 2y + 2z + 4 = 0$$

$$4(3+4t) - 2(2-2t) + 2(2t) = 0 \rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Sustituyendo en la recta obtengo el punto de interés, que denominaremos como A(1,4,−1)

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,3,-1), B(3,1,0)$ y $C(2,5,1)$ y se pide:

a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.
b) (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

Solución:

a) Para poder determinar si el triángulo será equilátero, isósceles o escaleno; calcularemos 3 vectores cogiendo los pares de puntos y también los módulos de éstos. Comparando los módulos veremos qué tipo de triángulo tenemos en este caso.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,-2,1) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3u.$
$\overrightarrow{AC} = C - A = (1,2,2) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = 3u.$
$\overrightarrow{BC} = C - B = (-1,4,1) \rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}u.$

Como vemos, al tener dos distancias iguales y una desigual, el triángulo será isósceles.

b) Para determinar los ángulos, se determinarán con el producto escalar de cada pareja de vectores.

$$\alpha = \text{arc.}\cos\left(\frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}\right) = \text{arc.}\cos\frac{2+2-4}{3 \cdot 3} = 90º$$
$$\beta = \text{arc.}\cos\left(\frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}\right) = \text{arc.}\cos\frac{|-2-8+1|}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = 45º$$
$$\gamma = \text{arc.}\cos\left(\frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}\right) = \text{arc.}\cos\frac{|-1+8+2|}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = 45º$$

Teniendo en cuenta estos valores, el triángulo será rectángulo e isósceles.